TD n°2 : Ensembles et applications

Exercice 1. Partie d'une union

Soient A, B, C trois ensembles. Est-ce que si un ensemble C vérifie $C \subset A \cup B$, alors $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Exercice 2. Trois ensembles

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que

$$A \subset B \subset C.$$

Exercice 3. Différence symétrique

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Montrer que
$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$, $A\Delta\overline{A}$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :
$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

Exercice 4. Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques respectives. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$;
2. fg ;
3. $f + g - fg$.

Exercice 5. Ensemble des parties

Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice 6. Produit cartésien et intersection

Soit E et F deux ensembles, soit A, C deux parties de E et B, D deux parties de F. Démontrer que

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Exercice 7. Composition itérée

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 8. Quelques exemples

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

Exercice 9. Composition et injectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 10. Bijection réciproque

Démontrer que l'application suivante est une bijection.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+3} \end{array}$$

Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 11. Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. On considère g la restriction de f à $[-1, 1]$

$$\begin{array}{rcl} g : [-1, 1] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

   Montrer que g est une bijection.

Exercice 12. Ensembles et images directes

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 13. Formule du crible

Dans une classe de 37 élèves, 25 étudient l'anglais et 13 étudient l'espagnol dont 7 qui étudient les deux langues. Combien d'élèves étudient au moins une de ces 2 langues ? Aucune d'entre elles ?